Geometrischer Schnitt im $\mathbb{R}^2$

Viktor Engelmann

8. August 2002

Gegeben seien zwei Strecken mit den Eckpunkten $a = (a_1, a_2)$, $a' = (a'_1, a'_2)$ und $b = (b_1, b_2)$, $b' = (b'_1, b'_2)$ (mit $a \neq a'$ und $b \neq b'$). Dann sind die Richtungsvektoren zwischen den jeweiligen Eckpunkten $\alpha := a' - a$ und $\beta := b' - b$. Hilfsgeraden durch die Strecken sind nun $a + k\alpha$ und $b + l\beta$. Man beachte: jeder Punkt auf den Geraden, für den $0 \leq k \leq 1$ bzw. $0 \leq l \leq 1$ gilt, liegt auch auf der jeweiligen Strecke, weil die Länge von α bzw. β gerade die Distanz von a zu a' bzw. von b zu b' ist. $(*)$

Genau dann, wenn sich die Geraden schneiden, existieren k und l sodass $a + k\alpha = b + l\beta$. Zerlegen wir diese Gleichung in in ihre beiden Bestandteile (wobei wir $(\alpha_1, \alpha_2) := \alpha$ und $(\beta_1, \beta_2) := \beta$ setzen), dann erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 + k\alpha_1 &= b_1 + l\beta_1 \\ a_2 + k\alpha_2 &= b_2 + l\beta_2 \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun l mit dem Einsetzungsverfahren, indem wir die erste Gleichung nach k auflösen, das Ergebnis in die zweite Gleichung einsetzen und diese nach l auflösen.

$$k = \frac{b_1 + l\beta_1 - a_1}{\alpha_1}$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} b_2 + l\beta_2 &= a_2 + \frac{b_1 + l\beta_1 - a_1}{\alpha_1}\alpha_2 \\ \Leftrightarrow \alpha_1 b_2 + \alpha_1 l\beta_2 &= \alpha_1 a_2 + (b_1 - a_1 + l\beta_1)\alpha_2 \\ \Leftrightarrow \alpha_1 b_2 + \alpha_1 l\beta_2 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_1 - \alpha_2 a_1 + \alpha_2 l\beta_1 \\ \Leftrightarrow \alpha_1 b_2 + \alpha_1 l\beta_2 - \alpha_2 l\beta_1 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_1 - \alpha_2 a_1 \\ \Leftrightarrow \alpha_1 l\beta_2 - \alpha_2 l\beta_1 &= \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_1 - \alpha_2 a_1 - \alpha_1 b_2 \\ \Leftrightarrow l(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) &= \alpha_1(a_2 - b_2) - \alpha_2(a_1 - b_1) \\ \Leftrightarrow l &= \frac{\alpha_1(a_2 - b_2) - \alpha_2(a_1 - b_1)}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \\ &= \frac{|\alpha, a - b|}{|\alpha, \beta|} \end{aligned}$$

Analog bestimmen wir k mit dem Einsetzungsverfahren, indem wir die erste Gleichung nach l auflösen, das Ergebnis in die zweite Gleichung einsetzen und diese nach k auflösen.

$$l = \frac{a_1 + k\alpha_1 - b_1}{\beta_1}$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}
a_2 + k\alpha_2 &= b_2 + \frac{a_1 + k\alpha_1 - b_1}{\beta_1}\beta_2 \\
\Leftrightarrow \beta_1 a_2 + \beta_1 k\alpha_2 &= \beta_1 b_2 + (a_1 + k\alpha_1 - b_1)\beta_2 \\
\Leftrightarrow \beta_1 a_2 + \beta_1 k\alpha_2 &= \beta_1 b_2 + \beta_2 a_1 + \beta_2 k\alpha_1 - \beta_2 b_1 \\
\Leftrightarrow \beta_1 a_2 + \beta_1 k\alpha_2 - \beta_2 k\alpha_1 &= \beta_1 b_2 + \beta_2 a_1 - \beta_2 b_1 \\
\Leftrightarrow \beta_1 k\alpha_2 - \beta_2 k\alpha_1 &= \beta_1 b_2 + \beta_2 a_1 - \beta_2 b_1 - \beta_1 a_2 \\
\Leftrightarrow k(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) &= \beta_1(b_2 - a_2) - \beta_2(b_1 - a_1) \\
\Leftrightarrow k &= \frac{\beta_1(b_2 - a_2) - \beta_2(b_1 - a_1)}{\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2} \\
&= \frac{|\beta, b - a|}{|\beta, \alpha|}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $|x, y|$ die Determinante der Matrix, deren Spalten den Vektoren x bzw. y entsprechen. Zusammen mit $(*)$ ergibt sich, dass die Strecken sich genau dann schneiden, wenn

$$0 \leq \frac{|\beta, b - a|}{|\beta, \alpha|} \leq 1 \text{ und } 0 \leq \frac{|\alpha, a - b|}{|\alpha, \beta|} \leq 1$$

gilt. Algorithmisch kann man einen kleinen Performance-Gewinn erzielen, indem man die Determinantengesetze ausnutzt, aus denen folgt, dass

$$\frac{|\alpha, a - b|}{|\alpha, \beta|} = \frac{-|\alpha, b - a|}{|\alpha, \beta|} = \frac{-|\alpha, b - a|}{-|\beta, \alpha|} = \frac{|\alpha, b - a|}{|\beta, \alpha|}$$

denn dadurch braucht man $|\beta, \alpha|$ und $b - a$ nur je ein mal zu berechnen.